Εαν μια ακολουθια είναι σταθερή τότε εχει οριακὸ σημεια αλλα αν δεν είναι σταθερή τοτε έχει σημείο συσσώρευσης

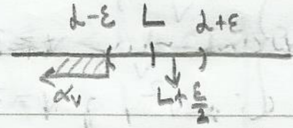
Καθε πραγματικος μπορεί να περιγραφεί απο μια ακολουθια της μορφής
$\beta_\nu = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}\eta\mu\nu\right)$.

Η ακολουθια $a_\nu = \nu\sqrt{2}$ έχει οριακά σημεία ολά τα σημεία του διαστήματος $[0,1]$
Διοτί $a_\nu = \nu\sqrt{2} - [\nu\sqrt{2}]$ ορίζεται στο $[0,1]$

ΘΕΩΡΗΜΑ

1) $\limsup(a_\nu) = L \in \tilde{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists (a_{k_\nu}) : a_{k_\nu} \to \limsup(a_\nu)$
2) $\liminf(a_\nu) = L \in \tilde{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \exists (a_{k_\nu}) : a_{k_\nu} \to \liminf(a_\nu)$

Αποδ



1) • $L \in \mathbb{R}$ και όχι οριακο τότε
$\exists\, \varepsilon > 0 \;\&\; k : \nu \geq k : |a_\nu - L| \geq \varepsilon \Rightarrow a_\nu \leq L - \varepsilon$ ή $a_\nu \geq L + \varepsilon$
$\limsup(a_\nu) = L \leq L \Rightarrow \exists k_1 : \nu \geq k_1 \Rightarrow a_\nu \leq L + \frac{\varepsilon}{2}$
Ας είναι $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$
Συνεπώς, για $\nu \geq k_0 \Rightarrow a_\nu \leq L - \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \inf_k \sup\{a_\nu : \nu \geq k\} \leq L - \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow \limsup(a_\nu) \leq L - \varepsilon$: αδύνατο!
Αρα, το L οριακο σημειο της ακολουθιας

• $\ell = \pm\infty$ αφήνεται για εξάσκηση

ΘΕΩΡΗΜΑ

1) $\limsup(\alpha_\nu) = \max\{\ell \in \tilde{\mathbb{R}} : \exists (\alpha_{k_\nu}) : \alpha_{k_\nu} \to \ell\}$

2) $\liminf(\alpha_\nu) = \min\{\ell \in \tilde{\mathbb{R}} : \exists (\alpha_{k_\nu}) : \alpha_{k_\nu} \to \ell\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Όταν οι πράξεις είναι επιτρεπτές (δηλ. να μην έχουμε την ακολουθία $(-\nu)+\nu$ ώστε $\limsup(\nu-\nu) = 0 \leq +\infty - \infty$).

Τότε:

i) $\limsup(\alpha_\nu + b_\nu) \leq \limsup(\alpha_\nu) + \limsup(b_\nu)$

και

ii) $\liminf(\alpha_\nu + b_\nu) \geq \liminf(\alpha_\nu) + \liminf(\alpha_\nu)$

Αποδ.

ii) Έστωσαν k_1, k_2 με $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$

Τότε για $x \in A$ και $y \in B$:

$x \geq \inf_{x \in A} x$ και $y \geq \inf_{y \in B} y$

$x + y \geq \inf_{x \in A} x + \inf_{y \in B} y \Rightarrow \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}}(x+y) \geq \inf_{x \in A} x + \inf_{y \in B} y$

Έτσι, από την παραπάνω γενική ιδιότητα:

$\liminf(\alpha_\nu + b_\nu) = \sup_k \inf\{\alpha_\nu + b_\nu : \nu \geq k\} \geq$

$\geq \inf\{\alpha_\nu + b_\nu : \nu \geq k_0\} \geq \inf\{\alpha_\nu : \nu \geq k_0\} + \inf\{b_\nu : \nu \geq k\}$

$\geq \inf\{\alpha_\nu : \nu \geq k_1\} + \inf\{b_\nu : \nu \geq k_2\}$,

Άρα,

$\forall k_1, k_2 : \liminf(\alpha_\nu + b_\nu) \geq \inf\{\alpha_\nu : \nu \geq k_1\} + \inf\{b_\nu : \nu \geq k_2\}$

$\liminf(\alpha_\nu + b_\nu) \geq \liminf(\alpha_\nu) + \liminf(b_\nu)$.

i) $\limsup(a_\nu+b_\nu) = \limsup(-(-(a_\nu+b_\nu))) =$

$= -\liminf(-(a_\nu+b_\nu)) = -\liminf(-a_\nu-b_\nu) \leq$

$\leq -\liminf(-a_\nu) - \liminf(-b_\nu) =$

$= \limsup(a_\nu) + \limsup(b_\nu)$

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ φορές}} \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Ογκος της μπάλας στον $\mathbb{R}^n$

$$V_n(\rho) = \frac{2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\cdot \pi^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n!!}\cdot \rho^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Δηλ. για μεγάλα n ένα σώμα συρρικνώνεται σε σημείο.

Επομένως, οι σφαιρικές περιοχές είναι "αδύναμες" να περιγράψουν χώρους μεγάλης διάστασης

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

- $x+y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$ (ΑΘΡΟΙΣΜΑ)
- $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$ (ΒΑΘΜΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ)

Αρα, ο χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικός χώρος
Δηλ. με την πρόσθεση είναι αβελιανή ομάδα
(και μάλιστα είναι και δακτύλιος)

Για το βαθμωτό πολ/μο ισχύουν:

- $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$
- $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$
- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- $1 \cdot x = x$

Άρα, καθίσταται (το $\mathbb{R}^n$) γραμμικός χώρος

ΒΑΣΗ HAMEL

Επίσης, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$= (x_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, x_n) =$$
$$= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + x_n \cdot (0, \ldots, 1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$$

όπου $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ καλείται βάση του $\mathbb{R}^n$ ευκλείδιου διανυσματικού (ή γραμμικού) χώρου

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ:

για τα x, y εν $\mathbb{R}^n$ ορίζεται

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \in \mathbb{R}$

Αν $y = x$ τότε

$\langle x, x \rangle = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0$

Τότε, $\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = |x|$. είναι η (απόλυτη τιμή του x ή) στάθμη.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΑΘΜΗΣ

1) $|x| \geq 0$ & $|x| = 0$ αν.ν $x = 0$
2) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3) $|x+y| \leq |x| + |y|$, x, y εν $\mathbb{R}^n$

ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY-SCHWARTZ

$|\langle x,y\rangle| \leq |x|\cdot|y|$.

Αποδ

$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle \geq 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\langle x,x\rangle + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\langle y,y\rangle \geq 0$

$|x|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2|y|^2 \geq 0$

Τότε $\Delta \leq 0 \rightarrow \langle x,y\rangle^2 - |x|^2\cdot|y|^2 \leq 0 \rightarrow$
$\rightarrow |\langle x,y\rangle| \leq |x|\cdot|y|$.

ΜΕΤΡΙΚΗ

$x,y \in \mathbb{R}^n$: $|x-y| := d(x,y)$

1) $d(x,y) \geq 0$ & $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Σφαιρική Περιοχή:

$(\mathbb{R}^n, d)$ ορίζουμε
$B(x,\rho) = \{ y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < \rho \Rightarrow |x-y| < \rho \}$, $\rho > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$

Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό αν
$(\forall x \in A)(\exists \rho > 0): B(x,\rho) \subseteq A$

$\mathbb{R}^n$ πλήρης $\Rightarrow$ x^ν βασική (ή Cauchy) θα είναι και συγκλίνουσα

$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$
$x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)$
$\vdots$
$x^\mu = (x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_n^\mu)$

x^ν βασική αν. $(\forall \varepsilon>0)(\exists k): \mu,\nu \geq k \Rightarrow |x^\mu - x^\nu| < \varepsilon$

ισοδύναμα:

$$\sqrt{(x_1^\mu, x_2^\mu, \ldots, x_n^\mu) - (x_1^\nu, x_2^\nu, \ldots, x_n^\nu)} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{|x_1^\mu - x_1^\nu|^2 + |x_2^\mu - x_2^\nu|^2 + \ldots + |x_n^\mu - x_n^\nu|^2} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

Έτσι, ισχύει:

$$\sqrt{|x_1^\mu - x_1^\nu|^2} < \varepsilon \xrightarrow{\text{βασική}} |x_1^\mu - x_1^\nu| < \varepsilon \to \lim_\mu x_1^\mu = x_1$$

$$\sqrt{|x_2^\mu - x_1^\nu|^2} < \varepsilon \to |x_2^\mu - x_2^\nu| < \varepsilon \to \lim_\mu x_2^\mu = x_2$$

$$\vdots$$

$$\sqrt{|x_n^\mu - x_n^\nu|} < \varepsilon \to |x_n^\mu - x_n^\nu| < \varepsilon \to \lim_\mu x_n^\mu = x_n$$

Ορισμός
Ένας μ.χ θα λέγεται διαχωρίσιμος αν καθε- υποσύνολο του είναι αριθμήσιμο και πυκνό

Πρόταση: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \begin{cases} K \text{ κλειστό } \& \\ \text{φραγμένο} \end{cases}$

Ορισμός: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές αν $\forall U_j$ ανοιχτή κάλυψη του K, $\exists j_1, \ldots, j_\lambda : K \subseteq \bigcup_{\mu=1}^{\lambda} U_{j_\mu}$

πχ

Στο διάστημα $(0,1]$
Έχουμε ότι $\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\nu+1}, \frac{1}{\nu}\right] = (0,1]$, δηλαδή υπάρχει μία κάλυψη η οποία δεν έχει πεπερασμένη πεπερασμένη υποκάλυψη.

Πρόταση

$(\forall (x_\nu) \subseteq K)(\exists x_{k_\nu})$ & $x \in K$: $x_{k_\nu} \to x$

Απόδ

$K \subseteq U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_\lambda \Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in K)(\exists j_x) : B(x, \varepsilon) \subseteq U_{j_x}$

$f_j(x) := d(x, U_j^c)$ τότε

$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_\lambda(x) \geq 0$

αν $f(x) = 0 \Rightarrow d(x, U_j^c) = 0, \forall j \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in \partial U_j^c, \forall j$
Αλλά, $x \in K$ (άτοπο)
άρα $f(x) > 0$.
Επομένως, $\exists k : f_k(x) \geq \frac{\varepsilon}{\lambda}$

Πρόταση

K συμπαγές, U ανοιχτό, $K \subseteq U \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists V_1, V_2, \dots, V_\lambda$ ανοιχτά ώστε
$K \subseteq V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_\lambda \subseteq \overline{V_1} \cup \overline{V_2} \cup \dots \cup \overline{V_\lambda} \subseteq U$